Επφωνήσεις και Λύσεις
Φυλλάδιο Ασκήσεων #2

Απειροστικός Λογισμός Ι, 2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Έστω A, B δυο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $\Gamma = \{a + \beta : \ a \in A, \ \beta \in B\}$. Δείξτε ότι $\sup \Gamma = \sup A + \sup B$ και $\inf \Gamma = \inf A + \inf B$.

2. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι αν $x \neq 1$ και $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 1] \to [0, 1]$ με τύπο $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$. Αφού δείξετε ότι η f ορίζεται καλά (πρέπει για $x \in [0, 1]$ να δειχθεί ότι $\dfrac{1 - x}{1 + x} \in [0, 1]$), να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και επί και να βρεθεί η αντίστροφή της. (Μπορείτε να μετασχηματίσετε τον τύπο της f ώστε το x να εμφανίζεται μόνο σε ένα σημείο στον τύπο της f).

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x + 1)^2 + 3$. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. Να βρείτε την εικόνα $f([-1, +\infty))$ της f και στη συνέχεια, αντικαθιστώντας το πεδίο τιμών με το σύνολο τιμών της f, να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης αυτής.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Να δείξετε ότι η f μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα $f = g + h$ με την g να είναι άρτια και την h περιττή. Στη συνέχεια δείξτε ότι η αναπαράσταση αυτή είναι μοναδική.

Απειροστικός Λογισμός Ι, 2ο φυλλάδιο Ασκήσεων

Λύσεις Ασκήσεων

1. Θδο $\sup \Gamma = \sup A + \sup B$

Ονομάζουμε $M_A = \sup A$ και $M_B = \sup B$

Άρα θδο $\sup \Gamma = M_A + M_B$.

Ισοδύναμα θδο

(α) $M_A + M_B$ είναι α.φ του Γ

(β) $\forall \varepsilon > 0$, $\underbrace{\exists \gamma \in \Gamma}$ τ.ω $M_A + M_B - \varepsilon < \gamma$

δηλ. $\exists\, \alpha \in A$, $\beta \in B$

τ.ω $\gamma = \alpha + \beta$

Για το (α):

(α) Αφού M_A α.φ του A, ισχύει

$\alpha \leq M_A$, $\forall \alpha \in A$. (Ι)

Αφου M_B α.φ του B, ισχύει

$$\beta \leq M_B \quad , \quad \forall\, \beta \in B \quad (\mathrm{II})$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (I) και (II)

οποτε παίρνουμε:

$$a + \beta \leq M_A + M_B \quad , \quad \forall a \in A, \beta \in B.$$

δηλ. $\gamma \leq M_A + M_\beta$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$.

Άρα, $M_A + M_B$ α.φ του Γ.

Για το (β): Έστω $\varepsilon > 0$ και ζητάμε

$a \in A$ και $\beta \in B$ τ.ω $M_A + M_B - \varepsilon < a + \beta$.

Απ' τη Χαρακτηριστική ιδιοτητα του $\sup A$

και του $\sup B$ έχουμε οτι:

$\exists\, a \in A$ τ.ω $M_A - \frac{\varepsilon}{2} < a$ και

$\exists\, \beta \in B$ τ.ω $M_B - \frac{\varepsilon}{2} < \beta$.

Προσθετουμε κατά μελη τις δύο προηγούμενες ανισότητες και εχουμε:

$$M_A - \frac{\varepsilon}{2} + M_B - \frac{\varepsilon}{2} < a+\beta \quad ή$$

$$M_A + M_B - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < a+\beta \quad ή$$

$$M_A + M_B - \varepsilon < a+\beta .$$

Άρα, αποδείξαμε ότι:

$$\sup \Gamma = \sup A + \sup B .$$

Αναλόγως αποδεικνύεται και η σχεση

$$\inf \Gamma = \inf A + \inf B . \qquad \square$$

2. Αν $n=1$, τότε $1+x = \frac{x^2-1}{x-1}$, αληθες

Υποθετουμε ότι ισχύει το ζητουμενο για $n=k$

Θδο ισχυει για $n=k+1$

Επαγωγική Υπόθεση: $1+x+\dots+x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

Έχουμε,

$$1+x+\dots+x^k+x^{k+1} \overset{ε.υ}{=} \frac{x^{k+1}-1}{x-1}+x^{k+1}$$

$$= \frac{x^{k+1}-1+x^{k+1}(x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{\cancel{x^{k+1}}-1+x^{k+2}-\cancel{x^{k+1}}}{x-1}$$

$$= \frac{x^{k+2}-1}{x-1}$$

Αποδείξαμε ότι ισχύει η πρόταση για $n=k+1$.

Άρα, από την Επαγωγή, ισχύει:

$$1+x+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \square$$

3. Πρώτα θδο η f είναι καλά ορισμένη. Έστω λοιπόν $x \in [0,1]$ και θέλω νδο $\frac{1-x}{1+x} \in [0,1]$ ή $0 \leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1$

ή $0 \leq 1-x \leq 1+x$ ή $-1 \leq -x \leq x$

ή $\begin{cases} x \leq 1 \\ 2x \geq 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ που ισχύει

Για το 1-1:

Έστω $x_1, x_2 \in [0,1]$ τ.ω $f(x_1) = f(x_2)$

και θδο $x_1 = x_2$.

Αφού $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2}$

$(1-x_1)(1+x_2) = (1+x_1)(1-x_2) \Rightarrow$

$\cancel{1} - \cancel{x_1 x_2} - x_1 + x_2 = \cancel{1} - \cancel{x_1 x_2} + x_1 - x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

Για το επί:

Η f είναι επί (του $[0,1]$), αν

$f([0,1]) = [0,1]$, όπου το $f([0,1])$

ορίζεται ως $f([0,1]) = \{y \in [0,1] : \exists x \in [0,1] \text{ τ.ω } y = f(x)\}$

Αρχικά, αν $y \in f([0,1]) \Rightarrow \exists x \in [0,1]$

τ.ω $y = f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

Δείξαμε προηγουμένως ότι $0 \le f(x) \le 1$

Άρα, $y \in [0,1]$.

Συνεπώς, $f([0,1]) \subseteq [0,1]$.

Απ' την άλλη μεριά, έστω $y \in [0,1]$

και θδο $y \in f([0,1])$.

Δηλ. Θδο $\exists\ x \in [0,1]$ τ.ω $y = f(x)$.

Το x αυτό προσδιορίζεται απ' την επίλυση της εξίσωσης $y = f(x)$ (ως προς x)

Έχουμε,
$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow y\cdot(1+x) = 1-x \Leftrightarrow y + yx = 1-x$$

$$\Leftrightarrow y-1 = -yx - x \Leftrightarrow y-1 = -x(y+1)$$

$$\overset{0\leq y\leq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{1-y}{1+y}$$

Πρέπει να εξακριβωθεί αν όντως το x που βρέθηκε ανήκει στο [0,1].

Όμως, αυτό ισχύει αφού δείξαμε στην αρχή της άσκησης ότι $\forall y \in [0,1]$ το $\frac{1-y}{1+y} \in [0,1]$

<u>Σχόλιο</u>: Η προηγούμενη εξίσωση έχει <u>μοναδική</u> λύση. Αυτό, μας δείχνει επίσης ότι η f είναι 1-1 (β' τρόπος).

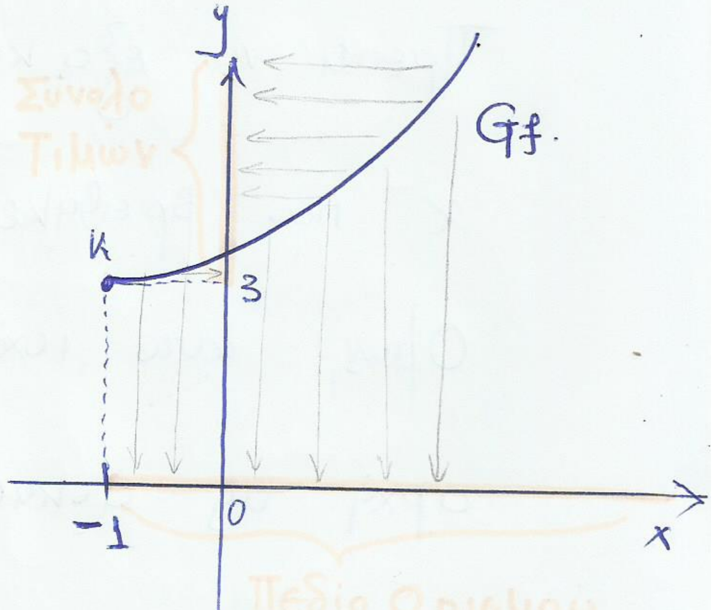
Συνεπώς:

Η Αντίστροφη της f είναι η:

$$f^{-1}(x)=\frac{1-x}{1+x}, \quad 0\le x\le 1$$

<u>Παρατήρηση</u>: $f^{-1}(x)=f(x),\ x\in[0,1]$ □

4. Η f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο $K(-1,3)$



Έστω λοιπόν $x_1, x_2 \geq -1$ τ.ω $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow (x_1+1)^2 + 3 = (x_2+1)^2 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1+1)^2 = (x_2+1)^2$$

$$\overset{x_1, x_2 \geq -1}{\Rightarrow} x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

$$f([-1,+\infty)) = \{ y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in [-1,+\infty) \text{ τ.ω } y = f(x) \}$$

Επιλύουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς $x \geq -1$. Είναι,

$$y = (x+1)^2 + 3 \Leftrightarrow y - 3 = (x+1)^2$$

$$(\text{Άρα, } y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 3).$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-3} = x + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y-3} - 1$$

Πρέπει $x \geq -1$ ή $\sqrt{y-3} - \cancel{1} \geq -\cancel{1}$

$\sqrt{y-3} \geq 0$ που ισχύει $\forall y \geq 3$.

Άρα, συναληθεύοντας τις σχέσεις

$\begin{cases} y \geq 3. \\ \sqrt{y-3} \geq 0 \end{cases}$ έπεται ότι $y \geq 3$.

Άρα, $f([-1,+\infty)) = [3,+\infty)$. $\square$

Αντικαθιστούμε τώρα το πεδίο τιμών απ' το σύνολο τιμών της f, δηλ την εικόνα $f([-1,+\infty))$ και έτσι $f:[-1,+\infty)\rightarrow[3,+\infty)$

Θα βρούμε την αντίστροφη της f, η οποία φανερά υπάρχει, αφού f 1-1 και επί του $[3,+\infty)$, (θυμηθείτε ότι $f([-1,+\infty))=[3,+\infty)$). Απ' τη διαδικασία που κάναμε για να υπολογίσουμε την εικόνα $f([-1,+\infty))$ απορρέει η $f^{-1}:[3,+\infty)\longrightarrow[-1,+\infty)$ είναι:

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x-3}-1\ ,\quad x\geq 3.$$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

5. Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{και}$$

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Τότε, $g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$

δηλ g άρτια.

και $h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} =$

$$= -\,\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x).$$

δηλ h περιττή

Τοτε, $f(x) = g(x) + h(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Εστω τώρα ότι υπάρχουν συναρτήσεις

ϕ αρτια & s περιττή τ.ω

$$f = \phi + s$$

Θδο $\phi = g$ και $s = h$.

Είναι $\begin{cases} f(x) = \phi(x) + s(x) \\ f(-x) = \phi(-x) + s(-x) = \phi(x) - s(x) \end{cases}$

Λύνουμε το συστημα ως προς τις ϕ, s.

Προσθετουμε κατά μέλη , και εχουμε.

$$2\phi(x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow \phi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

Άρα, $\phi = g$.

Αφαιρούμε κατά μέλη , και εχουμε:

$$2S(x) = f(x) - f(-x) \Rightarrow S(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Άρα, $s = h$. $\square$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ